

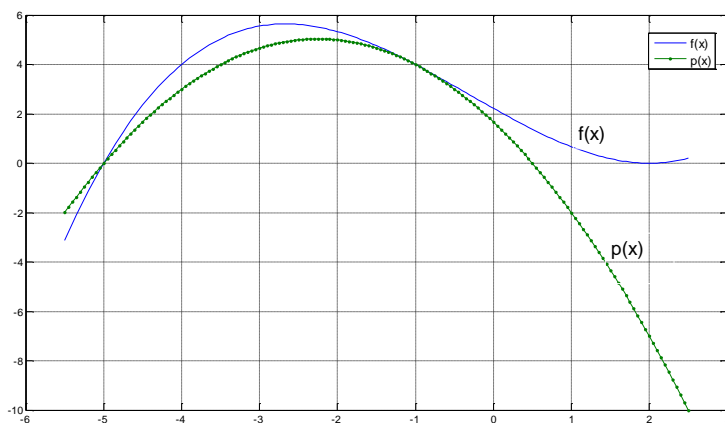
Teil 1: Mathematik

Aufgabe 1 (40 Punkte):

Gegeben ist die reelle Funktion

$$f : x \rightarrow \frac{1}{9}(x-2)(x^2+3x-10) = \frac{1}{9}(x^3+x^2-16x+20).$$

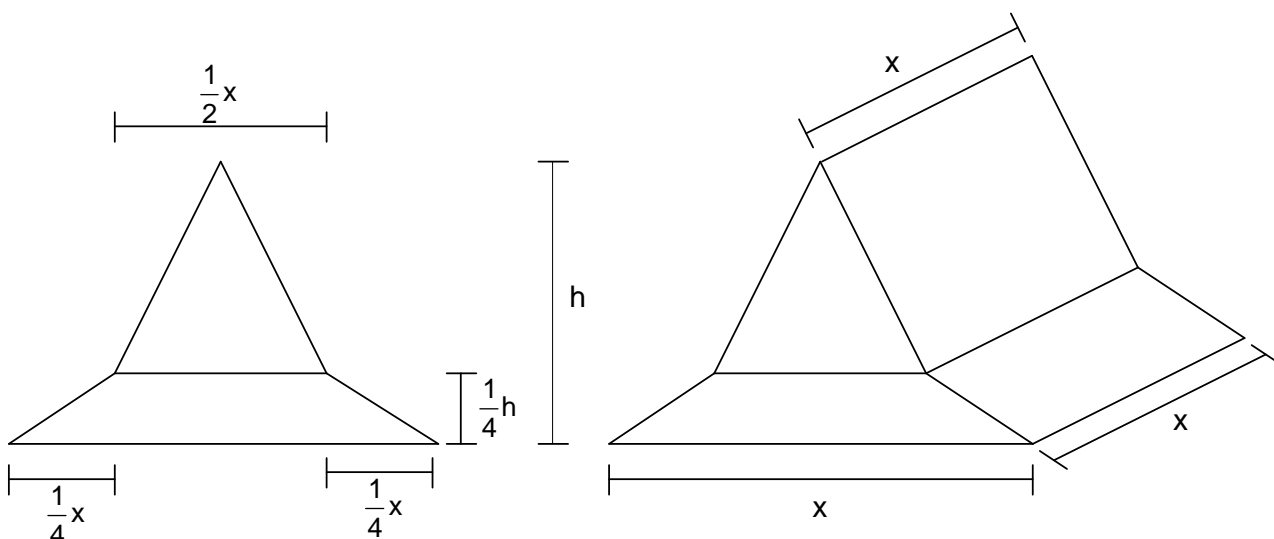
- Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$ und deren Vielfachheiten.
- Bestimmen Sie die relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion $f(x)$. Runden Sie ggf. auf zwei Nachkommastellen.
- Bestimmen Sie die Art der Extrempunkte (Minimum, Maximum, Sattelpunkt).
- Gegeben sei weiterhin eine **quadratische** Funktion $p(x)$. Der Graph von $p(x)$ besitzt an der Stelle $x = -\frac{9}{4}$ den Scheitelpunkt und berührt den Graphen der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x=-1$. Bestimmen Sie die Funktion $p(x)$. Zur Illustration sind beide Funktionen in der nachfolgenden Abbildung dargestellt (Ergebnis: $p(x) = -\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{5}{3}$).



- e) Die beiden Funktionen $f(x)$ und $p(x)$ schließen im Bereich von -5 bis -1 ein Flächenstück ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt auf zwei Nachkommastellen genau.

Aufgabe 2 (30 Punkte):

Eine Schokoladenfabrik will eine neue Praline auf den Markt bringen. Die Länge und Breite der Praline beträgt x cm. Die weiteren Größenverhältnisse sind den folgenden Abbildungen zu entnehmen. Aus verpackungstechnischen Gründen gilt für die Summe aus Höhe h , Breite x und Länge x : $h + 2x = 8$ cm.



- a) Stellen Sie eine Beziehung für das Volumen $V(x)$ der Praline in Abhängigkeit von x auf und geben Sie einen Bereich für x an, der zu sinnvollen Ergebnissen für $V(x)$ führt. Betrachten Sie hierbei den geometrischen Sachverhalt für den Sockel und das Dach der Praline. Die Einheit cm muss nicht berücksichtigt werden.

Hinweis: Ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe h und der Grundlinie

$$g \text{ hat den Flächeninhalt } A = \frac{1}{2} g \cdot h.$$

$$(\text{Ergebnis: } V(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 3x^2)$$

- b) Berechnen Sie x so, dass das Volumen $V(x)$ den größten Wert annimmt und überprüfen Sie, ob für das von Ihnen bestimmte x das Volumen tatsächlich maximal wird. Berechnen Sie auch die zugehörige Höhe h . Was fällt Ihnen am Ergebnis auf?

Teil 2: Physik

Aufgabe 3 (30 Punkte):

Von der Spitze eines Turmes lässt man einen Stein fallen ($v_0=0$). Nach 4 Sekunden sieht man ihn auf dem Boden aufschlagen.

- a) Wie hoch ist der Turm? (Ergebnis: 78,48m)
- b) Mit welcher Geschwindigkeit in km/h trifft der Stein auf dem Erdboden auf?
- c) Nach welcher Zeit hat der Stein die Hälfte seines Fallweges zurückgelegt?
- d) Welche Zeit braucht der Stein zum Passieren der letzten 20 m?
- e) Nach welcher Zeit vom Loslassen aus gerechnet hört man den Stein aufschlagen? Die Schallgeschwindigkeit betrage 320 m/sec.

Hinweise:

Für Bewegungen mit konstanter Beschleunigung a gilt:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

$$a = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

$s(t)$: in der Zeit t zurückgelegter Weg in m

s_0 : zur Zeit t_0 bereits zurückgelegter Weg

$v(t)$: Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in m/sec

v_0 : Anfangsgeschwindigkeit in m/sec

a : (konstante) Beschleunigung in m/sec^2

Verwenden Sie für die Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$!